



هم کلاسی
Hamkelasi.ir

پرسش‌های استاندارد درس آمار و احتمال (ویژه آزمون ۱)

۱

۱- در هر گزینه گزاره‌ی نمایی همراه با دامنه‌ی متغیر آن بیان شده است، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) $D = \mathbb{R} : 4x^2 + x = 5$

(۲) $D = \mathbb{N}$ عددی اول است؛

(۳) احتمال پیشامد A در پرتاب یک تاس برابر $\frac{1}{4}$ است؛ $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(۴) x مضرب ۷ است؛ $D = \mathbb{Z}$

۲- کدام یک از گزینه‌های زیر یک گزاره محسوب می‌شود؟

(۱) در پرتاب یک تاس احتمال آن که تاس مضرب ۳ بیاید، $\frac{1}{3}$ است. (۲) در کلاس را ببندید.

(۳) ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم. (۴) آیا $2 + 3$ برابر ۵ است؟

۳- کدام گزینه یک «گزاره» است؟

(۱) چه هوای خوبی! (۲) ایران، یک کشور آسیایی است. (۳) لطفاً در کلاس را ببندید. (۴) این جا سرآشپز کیست؟

۴- نقیض گزاره «a مضرب ۵ نیست یا زوج است» کدام گزینه است؟

(۱) a مضرب ۱۰ است. (۲) a مضرب ۵ است؛ ولی فرد نیست.

(۳) a مضرب فردی از ۵ است. (۴) a فرد است؛ ولی مضرب ۵ نیست.

۵- اگر ارزش نقیض p نادرست و ($\sim q$) درست باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های ($\sim p$) و q به ترتیب کدام است؟

(۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست

۶- ارزش کدام گزاره مرکب درست است؟

(۱) ۲ اول است یا $\sqrt{3}$ گنگ است. (۲) $\sqrt{4}$ گنگ است یا ۵ زوج است.

(۳) $\sqrt{29}$ گنگ است و ۲۴ مربع کامل است. (۴) $\sqrt{15}$ عددی گویا است و $\sqrt{16}$ عددی صحیح است.

۷- گزاره‌نمای «a عددی مربع کامل است و باقی‌مانده‌اش بر ۵ برابر ۱ است» را در نظر بگیرید. اگر دامنه‌ی متغیر این گزاره‌نما مجموعه‌ی اعداد صحیح دورقمی باشد، مجموعه‌ی جواب آن چند عضو دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸- در جدول ارزش گزاره‌های p، q، r و s در چند حالت حداقل ۳ گزاره دارای ارزش نادرست است؟

(۱) ۵ (۲) ۱۵ (۳) ۴ (۴) ۱۰

۹- اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند، به طوری که « $b < c$ یا « $a > b$ » نقیض آن در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $b \geq c, a \leq b$ (۲) $b > a > c$ (۳) $b \geq a \geq c$ (۴) $b > c, a < b$

۱۰- برای گزاره‌نمای «a عددی اول و مضرب ۵ است» به ترتیب دامنه‌ی متغیر و مجموعه‌ی جواب کدام می‌تواند باشد؟

(۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی - $\{5\}$ (۲) مجموعه‌ی اعداد طبیعی - مجموعه‌ی اعداد مضرب ۵

(۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح - $\{5\}$ (۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح - مجموعه‌ی اعداد مضرب ۵

۱۱- گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس احتمال آن که پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{3}$ است» را در نظر بگیرید. کدام یک از پیشامدهای زیر عضو از مجموعه جواب این گزاره‌نما است؟

(۱) ظاهر شدن عدد اول (۲) ظاهر شدن عدد زوج (۳) ظاهر شدن عدد مضرب ۳ (۴) ظاهر شدن عدد کوچک‌تر از ۴

۱۲- هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، نامیده می‌شود.

(۱) گزاره (۲) دامنه‌ی متغیر (۳) مجموعه جواب (۴) گزاره‌نما

۱۳- در جدول ارزش سه گزاره p، q و r چند حالت وجود دارد که فقط دو گزاره ارزش درست دارند؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴- به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، می‌گوییم.

(۱) گزاره‌نما (۲) مفروضات (۳) استدلال (۴) گزاره

۱۵- کدام گزینه درست است؟

(۱) ارزش $p \wedge q$ زمانی درست است که حداقل یکی از آن‌ها درست باشد.

(۲) اگر ارزش یکی از گزاره‌های p یا q نادرست باشد، $p \wedge q$ نادرست است.

(۳) اگر ارزش یکی از گزاره‌های p یا q درست نباشد، ارزش $p \vee q$ درست نیست.

(۴) اگر p نادرست باشد، $p \vee q$ نادرست است.

۱۶- کدام گزینه در مورد یک استدلال در منطق ریاضی درست نیست؟

(۱) هر استدلال می‌تواند شامل چندین جملهٔ خبری باشد.

(۲) نتیجهٔ یک استدلال یک جملهٔ خبری است.

(۳) مفروضات هر استدلال از یک جملهٔ خبری تشکیل شده است.

(۴) هر استدلال می‌تواند ترکیبی از گزاره‌ها باشد.

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ‌های تشریحی

۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه ۵ آمار و احتمال

نکته: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

در گزینه ۳، A باید زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از $D = \{1, 2, \dots, 6\}$ باشد. پس دامنه متغیر آن زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از مجموعه D است نه خود D . بنابراین گزینه ۳ نادرست است.

۲- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: دانش * صفحه‌های ۲ و ۳ آمار و احتمال

نکته ۱: به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم.

نکته ۲: جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند.

گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ گزاره نیستند؛ چون بیان یک امر و یا یک سؤال و یا احساسات می‌باشند.

فقط گزینه ۱، یک گزاره می‌باشد.

۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: دانش * صفحه ۳ آمار و احتمال

نکته ۱: به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم.

نکته ۲: جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند.

با توجه به نکات، تنها گزینه ۲ یک گزاره است.

۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه ۹ آمار و احتمال

نکته: نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. همچنین می‌توان با نفی کردن فعل جمله p ، نقیض آن را نوشت.

$$\begin{aligned} (a \text{ زوج است}) \wedge (\sim a \text{ مضرب ۵ نیست}) &\equiv (a \text{ زوج است} \vee a \text{ مضرب ۵ نیست}) \sim \\ &\equiv (a \text{ زوج نیست}) \wedge (a \text{ مضرب ۵ است}) \\ &\equiv (a \text{ فرد است}) \wedge (a \text{ مضرب ۵ است}) \\ &\equiv (a \text{ مضرب فردی از ۵ است}) \end{aligned}$$

۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۶ و ۷ آمار و احتمال

نکته: $\sim(\sim p) \equiv p$ ؛ یعنی نقیض نقیض هر گزاره با خود گزاره هم‌ارز است.

مطابق صورت سؤال $\sim p$ نادرست است، پس مطابق نکته $\sim(\sim p)$ درست است.

همچنین با توجه به گزاره دوم $\sim q$ درست است، پس q نادرست است.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۶- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۷ و ۸ آمار و احتمال

نکته ۱: جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکته ۲: جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ترکیب فصلی زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره‌ها درست باشد، پس گزینه ۱ پاسخ است.

گزینه ۲: هر دو گزاره نادرست و در نتیجه ترکیب فصلی نیز نادرست است.

گزینه ۳: گزاره « $\sqrt{29}$ گنگ است» درست و «۲۴ مربع کامل است» نادرست است. بنابراین ترکیب عطفی این دو گزاره نادرست است.

گزینه ۴: گزاره « $\sqrt{15}$ عددی گویا است» نادرست است، پس ترکیب عطفی نیز نادرست است.

۷- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۵ آمار و احتمال

نکتهٔ ۱: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این‌که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف **D** نمایش می‌دهند.

نکتهٔ ۲: در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعهٔ جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف **S** نشان می‌دهند.

اعداد مربع کامل دورقمی را می‌نویسیم و بررسی می‌کنیم باقی‌ماندهٔ کدام‌یک بر ۵، برابر یک است:

$$\begin{array}{ll} 16 = 3 \times 5 + 1 & \checkmark \\ 25 = 5 \times 5 + 0 & \times \\ 36 = 7 \times 5 + 1 & \checkmark \\ 49 = 5 \times 9 + 4 & \times \\ 64 = 5 \times 12 + 4 & \times \\ 81 = 16 \times 5 + 1 & \checkmark \end{array}$$

بنابراین مجموعه جواب آن در دامنهٔ متغیر این گزاره‌نما دارای ۳ عضو است.

۸- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۴ آمار و احتمال

نکته: تعداد حالت‌های ارزش‌گذاری n گزاره، برابر 2^n است.

تعداد حالاتی که حداقل ۳ گزاره نادرست باشد معادل این است که فقط ۳ گزاره نادرست باشد یا هر چهار گزاره نادرست باشند. پس داریم:

۴ گزاره نادرست یا ۳ گزاره نادرست

$$\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 4 + 1 = 5$$

با استفاده از جدول نیز می‌توانستیم پاسخ سؤال را به دست آوریم.

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۹ آمار و احتمال

۹- پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته: جدول ارزش گزاره‌ها $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

طبق نکته داریم:

$$\sim (b < c \vee a > b) \equiv \sim (b < c) \wedge \sim (a > b) \equiv (b \geq c) \wedge (a \leq b)$$

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۵ آمار و احتمال

نکتهٔ ۱: هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

نکتهٔ ۲: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این‌که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف **D** نمایش می‌دهند.

نکتهٔ ۳: در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعهٔ جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف **S** نشان می‌دهند.

اولاً دامنهٔ متغیر برای آن‌که گزاره‌نمای فوق معنادار باشد، مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

ثانیاً تنها عدد ۵ است که هم اول است و هم مضرب ۵.

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۳ و ۵ آمار و احتمال

نکتهٔ ۱: هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

نکتهٔ ۲: در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعهٔ جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف **S** نشان می‌دهند.

احتمال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: $A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ✗

گزینه ۲: $A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ✗

گزینه ۳: $A = \{3, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ✓

گزینه ۴: $A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ✗

بنابراین گزینه ۳ عضوی از مجموعه جواب این گزاره‌ها می‌باشد.

۱۲- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطه: دانش * صفحه ۵ آمار و احتمال

نکته ۱: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر تبدیل به یک گزاره می‌شود، گزاره‌ها نام دارد.
نکته ۲: در هر گزاره‌ها به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این گزاره تبدیل به گزاره شود، دامنه متغیر گزاره‌ها می‌گوییم و با D نمایش می‌دهیم.

نکته ۳: در هر گزاره‌ها به مجموعه اعضای از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره تبدیل به گزاره‌های درست می‌شود، مجموعه جواب گزاره‌ها می‌گوییم و با S نمایش می‌دهیم.

با توجه به نکات بالا، گزینه ۴ پاسخ است.

۱۳- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطه: کاربرد * صفحه ۴ آمار و احتمال

راه حل اول:

نکته: برای n گزاره، جدول ارزش گزاره‌ها، 2^n حالت دارد.

جدول ارزش گزاره‌ها برای ۳ گزاره به صورت زیر است:

مطابق جدول روبه‌رو، در ۳ حالت، دقیقاً دو گزاره ارزش درست دارند.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

راه حل دوم:

از بین ۳ گزاره می‌خواهیم دقیقاً ۲ گزاره ارزش درست داشته باشند. تعداد این حالات برابر $\binom{3}{2} = 3$ است.

۱۴- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطه: دانش * صفحه ۳ آمار و احتمال

نکته: به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم.
با توجه به نکته، گزینه ۴ پاسخ است.

۱۵- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطه: دانش * صفحه‌های ۷ و ۸ آمار و احتمال

نکته ۱: جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکتهٔ ۲: جدول ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

با توجه به جدول ارزش گذاری $p \vee q$ و $p \wedge q$ ، گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطه: دانش * صفحهٔ ۲ آمار و احتمال

نکته: یک استدلال می‌تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آن‌ها نتیجهٔ استدلال و بقیه مفروضات استدلال هستند.

با توجه به نکته گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ درست است؛ ولی گزینهٔ ۳ درست نیست، چون مفروضات یک استدلال می‌تواند بیش از یک جملهٔ خبری باشد.

گزینه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

پرسش‌های استاندارد درس آمار و احتمال (ویژهٔ آزمون ۲)

۱

۱- اگر ارزش گزاره‌های $p \vee r$ و $(p \vee q) \sim$ درست باشد، ارزش p و r چگونه است؟

- (۱) p درست و r درست
(۲) p درست و r نادرست
(۳) p نادرست و r درست
(۴) p نادرست و r نادرست

۲- یک گزارهٔ شرطی در کدام حالت قطعاً نادرست است؟

- (۱) مقدم و تالی هر دو نادرست باشند.
(۲) مقدم نادرست باشد.
(۳) مقدم درست و تالی نادرست باشد.
(۴) تالی نادرست باشد.

۳- گزارهٔ « $\sim p \Rightarrow q$ » هم‌ارز با کدام گزینه است؟

- (۱) $p \vee q$
(۲) $\sim p \vee q$
(۳) $p \vee \sim q$
(۴) $\sim p \vee \sim q$

۴- عکس نقیض گزارهٔ «اگر a^2 عددی فرد باشد، a نیز عددی فرد است.» کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)

- (۱) اگر a^2 زوج باشد، a زوج است.
(۲) اگر a زوج باشد، a^2 زوج است.
(۳) اگر a^2 زوج باشد، a فرد است.
(۴) اگر a زوج باشد، a^2 فرد است.

۵- نتیجهٔ استدلال زیر کدام است؟

- «هیچ عدد مرکبی، اول نیست.»
«۷ عددی مرکب است.»

- (۱) ۷ اول است.
(۲) ۷ اول نیست.
(۳) ۷ مرکب است.
(۴) ۷ مرکب نیست.

۶- کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$
(۲) $\forall x \in \mathbb{Z}; x(x+1) = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad (۴)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \times \cot x = 1 \quad (۳)$$

۷- گزارهٔ شرطی زیر هم‌ارز کدام گزینه است؟

- «اگر باران به کوهستان نیبارد»
(۱) اگر دجله خشک شود، آن‌گاه باران نیاریده است.
(۲) به سالی دجله گردد خشک رودی» (سعدی)
(۳) باران نمی‌بارد یا دجله خشک نمی‌شود.
(۴) اگر باران نیبارد، آن‌گاه دجله خشک نمی‌شود.

۸- کدام گزینه درست است؟

- (۱) گزاره، جمله‌ای است خبری که حالتی یا احساسی را بیان کند.
(۲) گزاره، شامل جمله‌های خبری یا امری است.
(۳) در هر گزاره‌نما، به ازای اعضای مجموعه جواب یک گزاره درست خواهیم داشت.
(۴) مجموعه جواب گزاره‌نما، همان دامنه متغیر است.

۹- کدام گزینه یک گزارهٔ همیشه درست نیست؟

- (۱) $p \Rightarrow (p \vee q)$
(۲) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
(۳) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
(۴) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

۱۰- اگر $\sim p \Leftrightarrow q$ گزاره‌ای نادرست باشد، کدام گزاره «همیشه درست» است؟

- (۱) $\sim p \Rightarrow q$
(۲) $p \Rightarrow \sim q$
(۳) $p \Rightarrow q$
(۴) $\sim q \Rightarrow p$

۱۱- ارزش کدام گزینه با سایر گزاره‌ها متفاوت است؟

- (۱) $p \Rightarrow (p \vee q)$
(۲) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
(۳) $p \wedge \sim p$
(۴) $p \Rightarrow p$

۱۲- اگر p شرط لازم و کافی برای q باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر درست نیست؟

- (۱) شرط لازم و کافی برای p است.
(۲) $\sim p$ شرط لازم و کافی برای $\sim q$ است.
(۳) ارزش p و q متفاوت است.
(۴) p اگر و فقط اگر q

۱۳- در تکمیل جدول مقابل ارزش گزاره‌های نامشخص کدام است؟

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \sim q$
		ن	

- (۱) , , 
(۲) , , 
(۳) , , 
(۴) , , 

۱۴- اگر $\sim p \vee q$ و $r \Rightarrow \sim s$ دو گزارهٔ نادرست باشند، کدام گزاره دارای ارزش درست است؟

- (۱) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$
(۲) $(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$
(۳) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$
(۴) $(p \Rightarrow r) \wedge (s \Rightarrow q)$

۱۵- نقیض گزارهٔ «بعضی از برنامه‌های تلویزیونی مفید نیستند»، کدام گزینه است؟

- (۱) همهٔ برنامه‌های تلویزیونی مفید هستند.
 (۲) بعضی از برنامه‌های تلویزیونی مفید هستند.
 (۳) همهٔ برنامه‌های تلویزیونی مفید نیستند.
 (۴) بعضی از برنامه‌های تلویزیونی مفید نیستند.

۱۶- نقیض گزارهٔ $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$ ، کدام است و ارزش نقیض چیست؟

- (۱) نادرست و $\exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$
 (۲) درست و $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$
 (۳) نادرست و $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$
 (۴) درست و $\exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$

خریشه دو



مؤسسه آموزشی فرهنگی

پاسخ‌های تشریحی

۱- پاسخ: گزینهٔ ۳
▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۷ آمار و احتمال
نکته: جدول ارزش‌گذاری ترکیب فصلی دو گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ارزش $(p \vee q) \sim$ درست است، پس $p \vee q$ دارای ارزش نادرست می‌باشد. با توجه به جدول، ترکیب فصلی دو گزاره فقط هنگامی نادرست است که هر دو نادرست باشند، پس p و q هر دو نادرست هستند. از طرفی طبق فرض $p \vee r$ درست است. با توجه به نادرست بودن p ، نتیجه می‌شود r درست است.

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳
▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: دانش * صفحه‌های ۹ و ۱۰ آمار و احتمال
نکته: گزارهٔ مرکب « $p \Rightarrow q$ » را می‌خوانیم «اگر p ، آن‌گاه q » و گزارهٔ شرطی می‌نامیم که در آن p را مقدم و q را تالی می‌گوییم.
نکته: جدول ارزش‌گذاری ترکیب شرطی دو گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

با توجه به نکات بالا، ترکیب شرطی زمانی نادرست است که مقدم آن درست و تالی آن نادرست باشد. بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۱
▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۷ و ۱۰ آمار و احتمال

نکته: $p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow q$

نکته: $\sim(\sim p) \equiv p$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$(\sim p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p) \vee q \equiv p \vee q$$

۴- پاسخ: گزینهٔ ۲
▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: دانش * صفحهٔ ۱۱ آمار و احتمال

نکته: گزاره‌های « $q \Rightarrow p$ » و « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » به ترتیب عکس و عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » نامیده می‌شود.

نکته: ارزش عکس نقیض گزارهٔ شرطی، با ارزش خود گزارهٔ شرطی یکسان است: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

با توجه به نکات بالا عکس نقیض گزارهٔ «اگر a^2 فرد باشد، a فرد است.» به صورت زیر است:

«اگر a فرد نباشد، a^2 فرد نیست.» $\equiv$ «اگر a زوج باشد، a^2 زوج است.»

پس گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۲
▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: درک و فهم * صفحهٔ ۲ آمار و احتمال

نکته: $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

گزارهٔ «هیچ عددی مرکبی، اول نیست» را می‌توان به صورت ترکیب شرطی زیر نوشت:

اگر x عددی مرکب باشد، آن‌گاه x اول نیست.

از ترکیب این گزاره با گزارهٔ « 7 عددی مرکب است.» نتیجه می‌گیریم که 7 اول نیست.

۶- پاسخ: گزینهٔ ۲
▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: دانش * صفحه‌های ۱۴ و ۱۸ آمار و احتمال

نکته: نماد « $\forall$ » که قبل از گزاره‌نماها قرار می‌گیرد و گزاره‌نماها را به گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست تبدیل می‌کند «سور عمومی» نام دارد و با عباراتی چون «به ازای جمیع مقادیر» یا «به ازای هر» خوانده می‌شود.

نکته: گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود وقتی به گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنهٔ متغیر، در گزاره‌نما صدق کند و هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

با توجه به نکات بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه ۱: نادرست است؛ زیرا $x = \frac{1}{p}$ در آن صدق نمی‌کند.

گزینه ۳: نادرست است؛ زیرا $x = \frac{\pi}{p}$ در آن صدق نمی‌کند.

گزینه ۴: نادرست است؛ زیرا $x = 1$ در آن صدق نمی‌کند.

مطابق گزینه ۲، حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی زوج است که گزاره‌ای همواره درست است.

۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: کاربرد * صفحه ۱۰ آمار و احتمال

نکته: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

در گزاره شرطی داده شده، گزاره p را «باران به کوهستان نمی‌بارد» و گزاره q را «دجله خشک رود می‌شود»، در نظر می‌گیریم. مطابق نکته بالا، این گزاره هم‌ارز $\sim p \vee q$ ؛ یعنی «باران می‌بارد یا دجله خشک می‌شود» است.

۸- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: دانش * صفحه‌های ۳ و ۵ آمار و احتمال

نکته: گزاره جمله‌ای است خبری که در حال حاضر یا آینده یا دارای ارزش درست و یا دارای ارزش نادرست باشد.

نکته: گزاره‌نما جمله‌ای است خبری که در آن متغیر به‌کار رفته باشد.

نکته: در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا این که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند.

نکته: در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست می‌شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند.

با توجه به نکات بالا، گزینه ۳ پاسخ است.

۹- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: کاربرد * صفحه ۱۱ آمار و احتمال

نکته: گزاره همیشه درست، گزاره‌ای است که ارزش آن همواره درست باشد. در گزاره‌های مرکب، گزاره همیشه درست، گزاره‌ای است که مستقل از ارزش گزاره‌ها همیشه دارای ارزش درست باشد. به عنوان مثال $(p \vee q) \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow (p \wedge q)$ گزاره‌های همیشه درست هستند.

با توجه به نکته بالا، گزینه‌های ۱ و ۲ گزاره‌های همیشه درست‌اند. حال به دو روش درستی گزینه‌های ۳ و ۴ را بررسی می‌کنیم. راه حل اول:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

با توجه به جدول، گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ همواره درست است؛ ولی گزاره $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ این‌طور نیست. بنابراین گزینه ۳ پاسخ است. راه حل دوم:

گزینه ۳: اگر p درست و q نادرست باشد، آن‌گاه $p \Rightarrow q$ نادرست است. پس گزاره شرطی $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ که مقدم آن درست و تالی آن نادرست است، نادرست می‌باشد. بنابراین گزاره مورد نظر همیشه درست نیست.

گزینه ۴: اگر p نادرست باشد، آن‌گاه گزاره شرطی $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ که مقدم آن نادرست است، درست می‌باشد.

اگر p درست باشد، آن‌گاه $q \Rightarrow p$ که تالی آن درست است، درست می‌باشد. بنابراین گزاره $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ که تالی آن درست است، درست می‌باشد. بنابراین این گزاره همیشه درست است.

۱۰- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۹ تا ۱۱ آمار و احتمال

نکته: جدول ارزش گذاری ترکیب دوشروطی دو گزاره به‌صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

با توجه به جدول بالا، ترکیب دو شرطی دو گزاره تنها زمانی نادرست است که ارزش دو گزاره متفاوت باشد. طبق فرض $p \Leftrightarrow q \sim$ نادرست است، پس $\sim p$ و q دارای ارزش‌های متفاوت هستند. بنابراین p و q هم‌ارزش‌اند. پس $p \Leftrightarrow q$ همواره درست است؛ یعنی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ همواره درست‌اند. با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ پاسخ است.

پرسش‌های استاندارد درس آمار و احتمال (ویژهٔ آزمون ۲)

۵

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: دانش * صفحهٔ ۱۱ آمار و احتمال

نکته: گزارهٔ همیشه درست، گزاره‌ای است که ارزش آن همواره درست باشد. در گزاره‌های مرکب، گزارهٔ همیشه درست، گزاره‌ای است که مستقل از ارزش گزاره‌ها همیشه دارای ارزش درست باشد. به عنوان مثال $(p \vee q) \Rightarrow p$ و $p \Rightarrow p$ گزاره‌های همیشه درست هستند.

با توجه به نکتهٔ بالا گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ گزاره‌هایی همیشه درست هستند؛ ولی گزارهٔ گزینهٔ ۳ همیشه نادرست است.

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: درک و فهم * صفحهٔ ۱۲ آمار و احتمال

نکته: گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ را به صورت «شرط لازم و کافی برای q است» یا « p اگر و تنها اگر q » می‌خوانیم.

نکته: $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow \sim p$, $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$

نکته: اگر $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، آن‌گاه ارزش p و q یکسان است.

با توجه به نکات بالا، گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۱۰ آمار و احتمال

نکته: جدول ارزش گذاری ترکیب شرطی دو گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

چون $p \Rightarrow q$ نادرست است، پس با توجه به نکتهٔ بالا p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow \sim q$
درست	نادرست	نادرست	درست

بدین ترتیب $p \Rightarrow \sim q$ که مقدم و تالی آن درست‌اند، یک گزارهٔ درست خواهد بود.

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۱۰ آمار و احتمال

نکته: گزارهٔ $p \vee q$ ، فقط در حالتی نادرست است که p و q هر دو نادرست باشند.

نکته: گزارهٔ $p \Rightarrow q$ فقط در حالتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

از نادرستی $p \vee q$ نتیجه می‌شود $\sim p$ نادرست (یعنی p درست) و q نادرست است.

همچنین از نادرستی $\sim s \Rightarrow r$ نتیجه می‌شود r درست است و $\sim s$ نادرست (یعنی s درست) است.

p	q	r	s	$(p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$	$(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$(p \Rightarrow r) \wedge (s \Rightarrow q)$
د	ن	د	د	د	ن	ن	ن

با توجه به جدول بالا، گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۱۶ آمار و احتمال

نکته: نقیض گزاره‌های سوری به شکل زیر است:

$$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

با توجه به نکتهٔ بالا، باید سور وجودی به سور عمومی تبدیل شود و گزاره‌ها نقیض شود، پس:

(همهٔ برنامه‌های تلویزیونی مفید هستند) $\equiv$ (بعضی از برنامه‌های تلویزیونی مفید نیستند)

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: دانش * صفحهٔ ۱۸ آمار و احتمال

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۴

نکته: نقیض گزاره‌های سوری به شکل زیر است:

$$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

ابتدا گزاره را نقیض می‌کنیم:

$$\sim (\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2) \equiv \exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$$

به ازای $x = -1$ ، مقدار $x - \frac{1}{x}$ برابر صفر است که بزرگ‌تر از -2 است. پس ارزش این گزاره درست است.

پرسش‌های استاندارد درس آمار و احتمال (ویژه آزمون ۳)

۱

۱- اگر برای مجموعه‌های دلخواه A, B, C و شرایط $D \subseteq C$ و $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ برقرار باشد، کدام گزینه می‌تواند نادرست باشد؟

- (۱) $(C - B) \subseteq (D - A)$ (۲) $(A - D) \subseteq (B - C)$
(۳) $(C - D) \subseteq (A - B)$ (۴) $(D - C) \subseteq (B - A)$

۲- مجموعه متناهی A را در نظر بگیرید. اگر ۲ عضو از آن کم کنیم، از تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد کم می‌شود. A چند زیر مجموعه غیر تهی دارد؟

- (۱) ۶۴ (۲) ۶۳ (۳) ۴۸ (۴) ۴۹

۳- کدام گزینه درست است؟

- (۱) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \notin B)$ (۲) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \wedge x \notin B)$
(۳) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$ (۴) $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \notin A \wedge x \notin B)$

۴- اگر A مجموعه‌ای غیر تهی باشد، در کدام گزینه X مجموعه تهی است؟

- (۱) $X \subseteq A, A \subseteq X$ (۲) $X \subseteq A, X' \subseteq A'$ (۳) $X \subseteq A, X \subseteq A'$ (۴) $A \subseteq X, X' \subseteq A'$

۵- در چند سطر از جدول ارزش گذاری گزاره مرکب $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q))$ ، همه گزاره‌های واقع در یک سطر جدول، هم‌ارزش هستند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- اگر $p \Rightarrow q$ درست و q نادرست باشد، ارزش گزاره‌های p و $p \wedge q$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) درست - درست (۲) درست - نادرست (۳) نادرست - درست (۴) نادرست - نادرست

۷- نقیض « $\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$ » کدام است؟

- (۱) $\forall y \in \mathbb{R}; y < 0 \vee y^2 \leq 1$ (۲) $\exists y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1$
(۳) $\forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1$ (۴) $\exists y \in \mathbb{R}; y > 0 \vee y^2 \geq 1$

۸- اگر p یک گزاره دلخواه، T یک گزاره همواره درست و F یک گزاره همواره نادرست باشد، آنگاه گزاره مرکب $p \wedge T$ هم‌ارز کدام گزینه است؟

- (۱) T (۲) $\sim(p \Rightarrow F)$ (۳) F (۴) $\sim p \Rightarrow T$

۹- گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس، احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{1}{6}$ است»، را در نظر بگیرید. کدام گزینه مجموعه جواب این گزاره‌نما است؟

- (۱) $\{1, 2, 3\}$ (۲) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$
(۳) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (۴) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

۱۰- کدام گزینه یک گزاره‌نما نیست؟

- (۱) a عددی فرد است. (۲) در پرتاب یک تاس، احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{1}{2}$ است.
(۳) $2 + 3 = 7$ (۴) $15x^2 - 7x - 8 = 0$

۱۱- کدام گزینه با گزاره « $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است» هم‌ارزش است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ عددی گنگ و کوچک‌تر از ۱ است.
(۲) $\exists A \in U; \emptyset \not\subseteq A$ (مجموعه مرجع است).
(۳) $\sqrt{3}$ عددی گویا است یا بزرگ‌تر از ۱ است.
(۴) مجموعه $A = \{\{1\}, \{1, 1\}\}$ چهار زیرمجموعه دارد.

۱۲- اگر $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ ، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $\emptyset \subseteq A$ (۲) $\{\emptyset\} \in A$ (۳) $\{a\} \in A$ (۴) $\{a\} \subseteq A$

۱۳- مجموعه $A = \{\{1, \{1\}\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

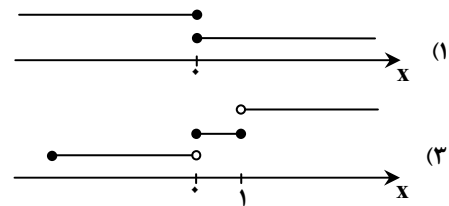
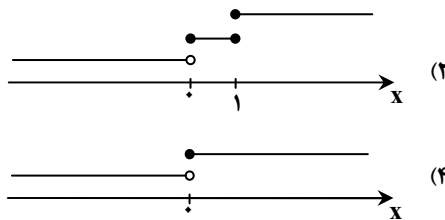
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۴

۱۴- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه k عضوی، ۲۴ واحد بیشتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۳ عضوی است. k کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۵- اگر $A = \{2k | k \in \mathbb{Z}, 0 < k < 5\}$ و $B = \{3k | k \in \mathbb{Z}, 0 < k < 10\}$ ، کدام گزینه به عنوان یک افراز برای $A \cup B$ قابل قبول نیست؟

- (۱) $\{2, 4, 6, 8\}, \{3, 9\}$ (۲) $\{2, 3, 4\}, \{6, 8, 9\}$
(۳) $\{2, 4, 8\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}$ (۴) $\{2, 3\}, \{4, 6\}, \{8, 9\}$

۱۶- کدام گزینه افزایی برای $\mathbb{R}$ است؟۱۷- نقیض گزارهٔ « $\forall x \in \mathbb{Q}; x^2 \geq x$ » کدام است؟

$$\forall x \in \mathbb{Q}'; x^2 \geq x \quad (۴) \quad \exists x \in \mathbb{Q}; x^2 < x \quad (۳) \quad \exists x \in \mathbb{Q}; x^2 \geq x \quad (۲) \quad \forall x \in \mathbb{Q}; x^2 < x \quad (۱)$$

۱۸- کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^2} = x\sqrt{x} \quad (۲) \quad \forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2}{x} = x \quad (۱)$$

$$\forall x \in \mathbb{N}; \frac{x}{x+1} < 1 \quad (۴) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}; x^2 + y^2 > 0 \quad (۳)$$

۱۹- اگر گزاره‌های $p \vee r$, $p \Rightarrow q$ و $\sim q$ درست باشند، کدام گزینه دارای ارزش درست است؟

$$p \wedge \sim q \quad (۴) \quad r \quad (۳) \quad q \wedge r \quad (۲) \quad p \quad (۱)$$

۲۰- مجموعهٔ داده شده در کدام گزینه با سایر گزینه‌ها برابر نیست؟

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\} \quad (۲) \quad A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 2x\} \quad (۱)$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\} \quad (۴) \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\} \quad (۳)$$

۲۱- برای سه مجموعهٔ $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ و $C = \{\{1\}, \{1\}, 2\}$ کدام گزینه درست است؟

$$A \subseteq B, B \subseteq C \quad (۴) \quad A \in B, B \subseteq C \quad (۳) \quad A \in B, B \in C, A \in C \quad (۲) \quad A \in B, B \in C, A \notin C \quad (۱)$$

۲۲- اگر $A = \{2, x + 2y, 4\}$, $B = \{4, 5, x - y\}$ و $A = B$ ، آنگاه مقدار $x + y$ کدام است؟

$$4 \quad (۴) \quad 3 \quad (۳) \quad 2 \quad (۲) \quad 1 \quad (۱)$$

۲۳- اگر $A \subseteq B$ ، آنگاه کدام گزینه قطعاً درست است؟

$$A' \subseteq B' \quad (۴) \quad B' \subseteq A' \quad (۳) \quad A' \subseteq B \quad (۲) \quad B' \subseteq A \quad (۱)$$

۲۴- مجموعهٔ $\{a, b, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \{b, a\}\}$ چند زیرمجموعهٔ ناتهی دارد؟

$$32 \quad (۴) \quad 31 \quad (۳) \quad 63 \quad (۲) \quad 64 \quad (۱)$$

۲۵- کدام گزینه یک افراز برای مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ محسوب نمی‌شود؟

$$\{1, 2\}, \{3, 4\} \quad (۴) \quad \{1\}, \{2, 3\}, \{4\} \quad (۳) \quad \{1, 2\}, \{2, 3, 4\} \quad (۲) \quad \{1, 2, 3\}, \{4\} \quad (۱)$$

۲۶- کدام مجموعه تهی است؟

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \wedge 2x = 4\} \quad (۲) \quad A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 8 = 8\} \quad (۱)$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = x\} \quad (۴) \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 7x\} \quad (۳)$$

۲۷- در مورد مجموعهٔ $A = \{a, \{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

$$\emptyset \subseteq A \quad (۴) \quad \{a, \{b\}\} \subseteq A \quad (۳) \quad \{a, b\} \subseteq A \quad (۲) \quad \{\{a\}\} \subseteq A \quad (۱)$$

۲۸- اگر $A \subseteq B$ و $A \subseteq B'$ ، آنگاه کدام گزینه قطعاً درست است؟

$$A = B' \quad (۴) \quad A = B \quad (۳) \quad A = U \quad (۲) \quad A = \emptyset \quad (۱)$$

پاسخ‌ها منتظرید

۱- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: کاربرد * صفحهٔ ۲۵ آمار و احتمال

نکته: $A - B = A \cap B'$

نکته: اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$

نکته: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آن‌گاه $A \cap C \subseteq B \cap D$

نکته: مجموعهٔ تهی، زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست.

با استفاده از نکات بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

$$1 \text{ گزینه } 1: (A \subseteq B) \Rightarrow (B' \subseteq A') \xrightarrow{C \subseteq D} (C \cap B') \subseteq (D \cap A') \Rightarrow (C - B) \subseteq (D - A)$$

$$2 \text{ گزینه } 2: (C \subseteq D) \Rightarrow (D' \subseteq C') \xrightarrow{A \subseteq B} (A \cap D') \subseteq (B \cap C') \Rightarrow (A - D) \subseteq (B - C)$$

$$3 \text{ گزینه } 3: \begin{cases} C \subseteq D \Rightarrow C - D = \emptyset \\ A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset \end{cases} \Rightarrow (C - D) \subseteq (A - B)$$

$$4 \text{ گزینه } 4: \text{مثال نقض: } A = \{3\}, B = \{3, 4\}, C = \{1\}, D = \{1, 2\} \Rightarrow (D - C) \not\subseteq (B - A)$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: درک و فهم * صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ آمار و احتمال

نکته: اگر مجموعهٔ متناهی A دارای n عضو باشد، آن‌گاه دارای $2^n - 1$ زیرمجموعه و دارای 2^n زیرمجموعهٔ غیرتهی است.

فرض کنیم $n(A) = k$ ، در این صورت طبق فرض داریم:

$$2^n - 2^{n-2} = 48 \Rightarrow 2^{n-2}(2^2 - 1) = 48 \Rightarrow 2^{n-2} \times 3 = 48 \Rightarrow 2^{n-2} = 16 \Rightarrow 2^{n-2} = 2^4 \Rightarrow n - 2 = 4 \Rightarrow n = 6$$

بنابراین مجموعهٔ A دارای $2^6 = 64$ زیرمجموعه و دارای $64 - 1 = 63$ زیرمجموعهٔ غیرتهی است.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: دانش * صفحهٔ ۲۲ آمار و احتمال

نکته: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$

نکته: $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$

با توجه به نکتهٔ بالا، گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۴- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: دانش * صفحهٔ ۲۱ آمار و احتمال

نکته: اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$

$$\begin{cases} (A \cap C) \subseteq (B \cap D) \\ (A \cup C) \subseteq (B \cup D) \end{cases} \text{ اگر } A \subseteq B \text{ و } C \subseteq D \text{، آن‌گاه}$$

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$1 \text{ گزینه } 1: X \subseteq A, A \subseteq X \Rightarrow X = A \neq \emptyset \quad \times$$

$$2 \text{ گزینه } 2: X' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq X \xrightarrow{X \subseteq A} X = A \neq \emptyset \quad \times$$

$$3 \text{ گزینه } 3: \begin{cases} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{cases} \Rightarrow X \cap X \subseteq A \cap A' \Rightarrow X \subseteq \emptyset \Rightarrow X = \emptyset \quad \checkmark$$

$$4 \text{ گزینه } 4: X' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq X \xrightarrow{A \neq \emptyset} X \neq \emptyset \quad \times$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۵- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۱۲ و ۱۸ آمار و احتمال

جدول ارزش‌گذاری گزارهٔ مرکب داده شده را تشکیل می‌دهیم.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	د

تنها در سطر اول جدول، همهٔ گزاره‌ها دارای ارزش یکسان هستند. بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

۶- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: کاربرد * صفحه ۱۰ آمار و احتمال

نکته: جدول ارزش‌گذاری ترکیب شرطی دو گزاره به صورت زیر است:

	p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	د	د
ن	ن	د	د

طبق فرض $p \Rightarrow q$ درست و q نادرست است، پس از نکته بالا نتیجه می‌شود، p نادرست است. بنابراین $\sim p$ درست است. در نتیجه ترکیب عطفی $p \wedge q \sim$ نادرست است.

۷- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: دانش * صفحه ۱۶ آمار و احتمال

نکته: $\sim (\exists x ; p(x)) \equiv \forall x ; \sim p(x)$ نکته: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee (\sim q)$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R} ; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \equiv \forall y \in \mathbb{R} ; \sim (y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \equiv \forall y \in \mathbb{R} ; y \geq 0 \vee y^2 > 1$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۸- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۱۸ آمار و احتمال

نکته: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ با توجه به اینکه T یک گزاره همواره درست است، داریم: $p \wedge T \equiv p$.

گزینه ۱ همواره درست و گزینه ۳ همواره نادرست است، پس این دو گزینه رد می‌شوند. اکنون گزینه‌های ۲ و ۴ را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۲: } \sim (p \Rightarrow F) \equiv \sim (\sim p \vee F) \equiv p \wedge (\sim F) \equiv p \wedge T \equiv p$$

$$\text{گزینه ۴: } \sim p \Rightarrow T \equiv (\sim p) \vee T \equiv p \vee T \equiv T$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۹- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه ۵ آمار و احتمال

نکته: در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به‌ازای آن‌ها، گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست، تبدیل شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند.

می‌دانیم فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس به صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. با توجه به نکته بالا باید زیرمجموعه A از S به گونه‌ای باشد که $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$. چون $n(S) = 6$ ، پس A می‌تواند هر یک از زیرمجموعه‌های تک عضوی S باشد، بنابراین مجموعه جواب این گزاره‌نما عبارت است از: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

دقت کنید که A از جنس مجموعه است. بنابراین مقادیر آن باید مجموعه باشند. به همین دلیل گزینه ۳ نمی‌تواند پاسخ باشد.

۱۰- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * صفحه ۵ آمار و احتمال

نکته: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر(ها) به یک گزاره تبدیل می‌شود، «گزاره‌نما» نام دارد.

با توجه به نکته بالا، گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ گزاره‌نما هستند، ولی گزینه ۳ یک گزاره است که البته ارزش آن نادرست است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۵، ۷، ۸، ۱۴ و ۱۹ آمار و احتمال

گزاره « $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است»، یک گزاره درست است، پس هم‌ارزش با گزینه‌ای است که یک گزاره درست را معرفی کند. هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱: این گزاره مرکب، یک ترکیب عطفی است و چون $\sqrt{3}$ کوچک‌تر از ۱ نیست، نادرست است. ✗

گزینه ۲: نادرست است، چون تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است. ✗

گزینه ۳: این گزاره مرکب یک گزاره فصلی است. چون $\sqrt{3}$ بزرگ‌تر از ۱ است، این گزاره درست است. ✓

گزینه ۴: نادرست است، چون $A = \{\{1\}, \{1, 1\}\} = \{\{1\}\}$ و هر مجموعه ۱ عضوی ۲ زیرمجموعه دارد. ✗

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۲- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: دانش * صفحه‌های ۱۹ و ۲۰ آمار و احتمال

چون عضو $\{\emptyset\}$ در مجموعه A وجود ندارد، پس $\{\emptyset\} \notin A$ ، بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

۱۳- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: کاربرد * صفحه ۲۰ آمار و احتمال

نکته: اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، آن گاه 2^n زیرمجموعه دارد.

مجموعه $A = \{\{\}, \{\{1\}\}\}$ فقط ۱ عضو $(\{\}, \{\{1\}\})$ دارد، پس $2^1 = 2$ زیرمجموعه دارد.

۱۴- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: کاربرد * صفحه ۲۱ آمار و احتمال

نکته: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است.

یک مجموعه k عضوی، 2^k و یک مجموعه ۳ عضوی، 2^3 زیرمجموعه دارد. طبق فرض داریم:

$$2^k = 2^3 + 2^4 \Rightarrow 2^k = 8 + 16 = 24 \Rightarrow 2^k = 2^5 \Rightarrow k = 5$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: درک و فهم * صفحه ۲۱ آمار و احتمال

نکته: افراز یک مجموعه، یعنی تقسیم آن مجموعه به چند زیرمجموعه نا تهی به طوری که:

(الف) اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد.

(ب) اجتماع آن‌ها برابر مجموعه اولیه باشد.

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 < k < 5\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}, 0 < 3k < 10\} = \{3, 6, 9\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

بنابراین: با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ یک افراز برای $A \cup B$ نیست، زیرا: $\{3, 6\} \cap \{3, 9\} = \{3\} \neq \emptyset$

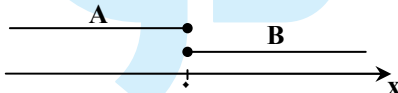
۱۶- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۲۱ و ۲۵ آمار و احتمال

نکته: افراز یک مجموعه، یعنی تقسیم آن مجموعه به چند زیرمجموعه نا تهی به طوری که:

(الف) اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد.

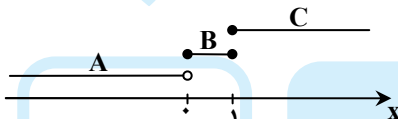
(ب) اجتماع آن‌ها برابر مجموعه اولیه باشد.

گزینه ۱:



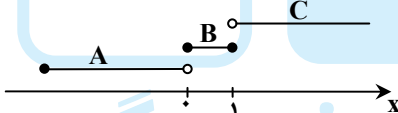
$$A \cap B = \{0\} \neq \emptyset \quad \times$$

گزینه ۲:



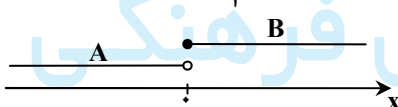
$$B \cap C = \{5\} \neq \emptyset \quad \times$$

گزینه ۳:



$$A \cup B \cup C \neq \mathbb{R} \quad \times$$

گزینه ۴:



$$A, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R} \quad \checkmark$$

۱۷- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ آمار و احتمال

نکته: $\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$\sim (\forall x \in \mathbb{Q}; x^2 \geq x) \equiv \exists x \in \mathbb{Q}; x^2 < x$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۸- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۱۴ و ۱۵ آمار و احتمال

گزینه ۱: $x = 0$ مثال نقض است، زیرا مخرج را صفر می‌کند.

گزینه ۲: همه اعداد منفی مثال نقض هستند، زیرا زیر رادیکال را منفی می‌کنند.

گزینه ۳: $x = y = 0$ مثال نقض است، زیرا $0 > 0$ نادرست است.

گزینه ۴: همواره درست است، زیرا مخرج همواره از صورت بیشتر است.

$$\left\{ \frac{x}{x+1}, x \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\} \Rightarrow \frac{x}{x+1} < 1$$

۱۹- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۶، ۷ و ۱۰ آمار و احتمال

نکته: جدول ارزش‌گذاری ترکیب شرطی و فصلی دو گزاره به صورت زیر است:

	p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$
د	د	د	د	
د	ن	ن	د	
ن	د	د	د	
ن	ن	د	ن	

 $\sim q$ درست است، پس q نادرست است. $p \Rightarrow q$ درست و q نادرست است، پس با توجه به نکته بالا، p نادرست است. $p \vee r$ درست و p نادرست است، پس r درست است.

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ پاسخ است.

۲۰- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: دانش * صفحه ۲۴ آمار و احتمال

$$1 \text{ گزینه } 1: x^2 \leq 2x \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow 0 < x < 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} A = \{1\}$$

$$2 \text{ گزینه } 2: |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{-1, 0, 1\}$$

$$3 \text{ گزینه } 3: x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} C = \{-1, 0, 1\}$$

$$4 \text{ گزینه } 4: x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow D = \{-1, 0, 1\}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

۲۱- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: * دشوار * حیطة: درک و فهم * صفحه ۲۵ آمار و احتمال

طبق فرض $A = \{\{\}\}$ ، $B = \{\{\{\}\}, \{\{\}\}, \{2\}, \{3\}$ و $C = \{\{\{\}\}, \{\{\}\}, \{2\}, \{3\}$. پس:

$$\{\{\}\} \in B \Rightarrow A \in B$$

$$\{\{\}\} \in C \Rightarrow A \in C$$

$$\{\{\{\}\}, \{2\}\} \in C \Rightarrow B \in C$$

$$1 \in A, 1 \notin B \Rightarrow A \not\subseteq B$$

$$2 \in B, 2 \notin C \Rightarrow B \not\subseteq C$$

بنابراین $A \in B$ ، $B \in C$ ، $A \in C$ ، $A \not\subseteq B$ و $B \not\subseteq C$ ، پس گزینه ۲ پاسخ است.

۲۲- پاسخ: گزینه ۴

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: دانش * صفحه ۲۵ آمار و احتمال

نکته: برای دو مجموعه A و B داریم: $A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

با توجه به نکته بالا، باید اعضای هر دو مجموعه یکسان باشند، پس:

$$\{2, x+2y, 4\} = \{x-y, 5, 4\} \Rightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow x+y=4$$

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: دانش * صفحه ۲۲ آمار و احتمال

۲۳- پاسخ: گزینه ۳

نکته: اگر $A \subseteq B$ ، آن گاه $B' \subseteq A'$

با توجه به نکته بالا، گزینه ۳ پاسخ است.

۲۴- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه ۲۰ آمار و احتمال

نکته: هر مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه و $2^n - 1$ زیرمجموعه ناتهی است.

نکته: تکرار یک عضو در مجموعه تأثیری ندارد.

اولاً $\{a, b\} = \{b, a\}$ ، پس مجموعه مورد نظر به صورت $\{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ است که دارای ۵ عضو است، بنابراین

$$31 - 1 = 2^5 \text{ زیرمجموعه ناتهی دارد.}$$

۲۵- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: درک و فهم * صفحه ۲۱ آمار و احتمال

نکته: افراز یک مجموعه یعنی تقسیم، مجموعه به چند زیرمجموعه ناتهی به طوری که:

(الف) اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد.

(ب) اجتماع آن‌ها برابر مجموعه اولیه باشد.

گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ افراز مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ هستند، ولی گزینه ۲ افراز محسوب نمی‌شود؛ زیرا $\{1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\} \neq \emptyset$

پس گزینه ۲ پاسخ است.

پرسش‌های استاندارد درس آمار و احتمال (ویژهٔ آزمون ۳)

۷

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: دانش * صفحهٔ ۱۹ آمار و احتمال

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۲

هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینهٔ ۱: } x+8=8 \Rightarrow x=0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow A=\{0\}$$

$$\text{گزینهٔ ۲: } \begin{cases} x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \\ 2x=4 \Rightarrow x=2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset \Rightarrow B=\emptyset$$

$$\text{گزینهٔ ۳: } x^2=7x \Rightarrow x^2-7x=0 \Rightarrow x(x-7)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=7 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x=7 \Rightarrow C=\{7\}$$

$$\text{گزینهٔ ۴: } x^2=x \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=1 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x=1 \Rightarrow D=\{1\}$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: کاربرد * صفحه‌های ۱۹، ۲۲ و ۲۳ آمار و احتمال

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۲

نکته: $\{a\} \subseteq A$ ، اگر و فقط اگر $a \in A$.

نکته: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A; (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

نکته: تهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواهی است.

با استفاده از نکته‌های بالا، هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: درست است، زیرا $\{a\} \in A$

گزینهٔ ۲: نادرست است، زیرا $b \notin A$

گزینهٔ ۳: درست است، زیرا $\{b\} \in A, a \in A$

گزینهٔ ۴: درست است، زیرا تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعهٔ دلخواهی است.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: دانش * صفحهٔ ۳۱ آمار و احتمال

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته: $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$

نکته: $\forall A \in \mathcal{U}; \emptyset \subseteq A$

نکته: $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\begin{cases} A \subseteq B \\ A \subseteq B' \end{cases} \Rightarrow A \cap A \subseteq B \cap B' \Rightarrow A \subseteq \emptyset \xrightarrow{\emptyset \subseteq A} A = \emptyset$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

پرسش‌های استاندارد درس آمار و احتمال (ویژه آزمون ۴)

۱

۱- در کیسه‌ای ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره به تصادف یکی پس از دیگری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال

آن که هر دو مهره سفید باشند، کدام است؟

- (۱) $0/1$ (۲) $0/2$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

۲- اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، حاصل $1 - P(A') - P(A \cap B)$ کدام است؟

- (۱) $P(A \cap B')$ (۲) $P(B \cap A')$ (۳) $P(B)$ (۴) $P(B')$

۳- کدام یک از گزینه‌های زیر با $A \cap B$ ناسازگار نیست؟

- (۱) $A - B$ (۲) $\emptyset$ (۳) A' (۴) $A \cup B$

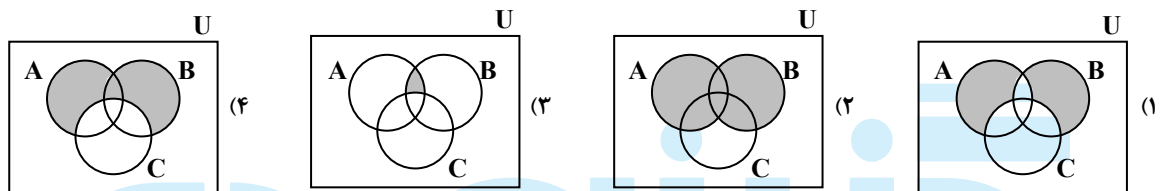
۴- اگر $A \subseteq B'$ ، کدام گزینه الزاماً درست نیست؟

- (۱) $A \cap B = A'$ (۲) $A \cup B' = B'$ (۳) $A - B = A$ (۴) $B \subseteq A'$

۵- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 5\}$ و $A \cap B \subseteq X \subseteq A \cup B$ ، به جای X چند مجموعه می‌توان قرار داد؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۶- کدام نمودار نمایش مجموعه اعضایی است که هم در A و هم در B هستند، ولی در C نیستند؟



۷- به چند حالت می‌توان ۳ نفر را یکی پس از دیگری از یک گروه ۵ نفره انتخاب کرد؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۶۰

۸- احتمال این که دانش آموزی در درس فیزیک قبول شود، $0/55$ و احتمال این که در درس شیمی قبول شود، $0/6$ است. اگر احتمال آن که حداقل در

یکی از این دو درس قبول شود، $0/75$ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟

- (۱) $0/35$ (۲) $0/4$ (۳) $0/45$ (۴) $0/5$

۹- اگر $A = \{3, 4\}$ و $B = [1, 5]$ ، نمودار ضرب دکارتی $A \times B$ کدام است؟

- (۱) چهار نقطه (۲) دو پاره‌خط موازی محور y ها (۳) دو پاره‌خط موازی محور x ها (۴) سطح یک مستطیل

۱۰- حاصل $(A - B) \cup (B - A)$ همواره کدام است؟ (مجموعه مرجع است.)

- (۱) $A \cup B$ (۲) U (۳) $(A \cup B) - (A \cap B)$ (۴) $(A \cup B) - (A \cap B)$

۱۱- اگر $A \cup B' = A \cup C'$ و $A - B = A - C$ ، کدام گزینه درست است؟ (مجموعه مرجع است.)

- (۱) $B = C'$ (۲) $B \cap C = \emptyset$ (۳) $B = C$ (۴) $B \cup C = U$

۱۲- مجموعه اعداد طبیعی چند زیرمجموعه دارد که کوچک‌ترین عضو آن ۵ و بزرگ‌ترین عضو آن ۱۷ باشد؟

- (۱) 2^{10} (۲) 2^{11} (۳) 2^{12} (۴) 2^{13}

۱۳- اگر دو عضو متمایز جدید به مجموعه A اضافه شود، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۹۶ واحد اضافه می‌شود. مجموعه A قبل از اضافه کردن دو

عضو، چند زیرمجموعه دوعضوی دارد؟

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۴- اگر A یک مجموعه دلخواه و U مجموعه مرجع باشد، ساده شده عبارت $(A \cup U)' \cup (A \cap \emptyset)'$ کدام است؟

- (۱) A' (۲) A (۳) $\emptyset$ (۴) U

۱۵- اگر $A \cup (B - A) = B$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) $A \subseteq B$ (۲) $B \subseteq A$ (۳) $A \cap B = \emptyset$ (۴) $B = \emptyset$

پاسخ‌ها و تشریح

۱- پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطه: درک و فهم * صفحهٔ ۴۲ آمار و احتمال

نکته: احتمال رخداد پیشامد A در فضای نمونه‌ای S، برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S) = 5 \times 4 = 20$

تعداد اعضای پیشامد مورد نظر برابر است با: $n(A) = 3 \times 2 = 6$

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0.3$

۳ سفید
۲ سیاه
۵ مهره

۲- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطه: کاربرد * صفحهٔ ۴۵ آمار و احتمال

نکته: $1 - P(A') = P(A)$

نکته: $P(A) - P(A \cap B) = P(A - B)$

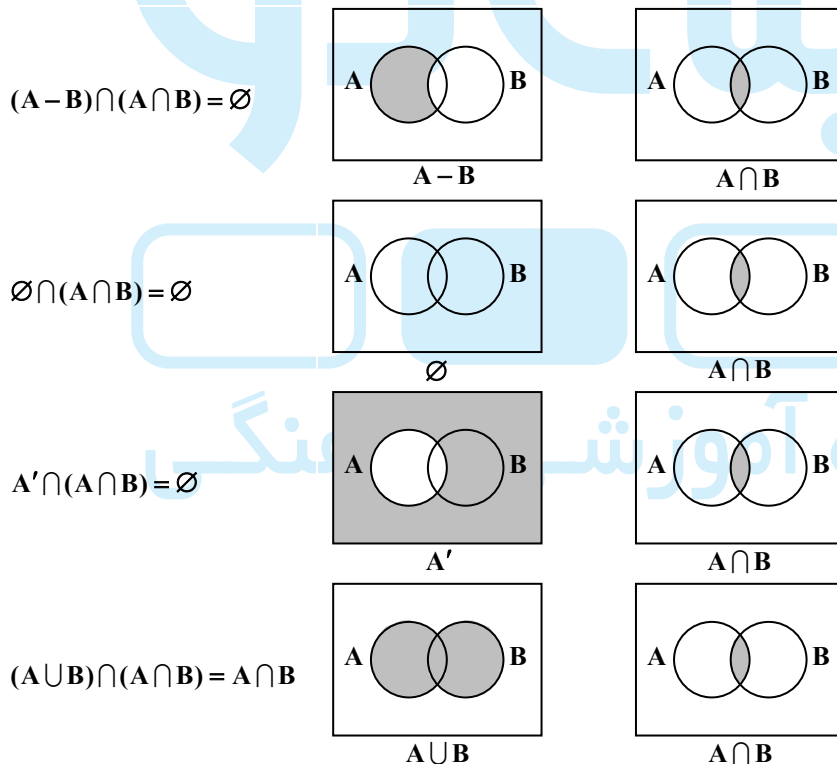
با استفاده از نکات بالا داریم:

$$1 - P(A') - P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A - B) = P(A \cap B')$$

۳- پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطه: کاربرد * صفحهٔ ۴۵ آمار و احتمال

نکته: دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S را ناسازگار می‌نامیم، هرگاه $A \cap B = \emptyset$

با توجه به نکتهٔ بالا هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

۴- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطه: درک و فهم * صفحهٔ ۲۹ آمار و احتمال

نکته: اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$ ، $A \cup B = B$ ، $A \cap B = A$

گزینهٔ ۱: $A \subseteq B' \xrightarrow{B \cap B' = \emptyset} A \cap B = \emptyset$ *

گزینهٔ ۲: $A \subseteq B' \Rightarrow A \cup B' = B'$ ✓

گزینهٔ ۳: $A \subseteq B' \Rightarrow A \cap B' = A \Rightarrow A - B = A$ ✓

گزینهٔ ۴: $A \subseteq B' \Rightarrow B \subseteq A'$ ✓

پرسش‌های استاندارد درس آمار و احتمال (ویژه آزمون ۴)

۳

۵- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: کاربرد * صفحه ۱۹ آمار و احتمال

با توجه به مجموعه‌های A و B داریم:

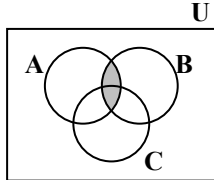
$$\{2, 3, 4\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

مجموعه X می‌تواند به یکی از چهار شکل زیر باشد:

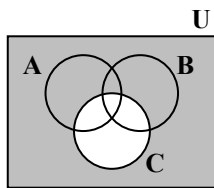
$$\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

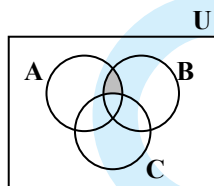
۶- پاسخ: گزینه ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطة: دانش * صفحه ۳۵ آمار و احتمال



مجموعه اعضایی که در A و B هستند، عبارت است از: $A \cap B$



مجموعه اعضایی که در C نیستند، عبارت است از: C'



بنابراین مجموعه اعضایی که هم در A و هم در B هستند؛ ولی در C نیستند، عبارت است از: $(A \cap B) \cap C'$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۷- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: درک و فهم * صفحه ۴۲ آمار و احتمال

برای انتخاب نفر اول، ۵ حالت وجود دارد. پس از آن برای انتخاب نفر دوم، ۴ حالت امکان پذیر است. در پایان برای انتخاب نفر سوم، ۳ حالت ممکن است. پس طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های ممکن برابر است با: $5 \times 4 \times 3 = 60$

۸- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه ۴۶ آمار و احتمال

نکته: احتمال این که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد، برابر است با: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

اگر پیشامد قبولی در درس فیزیک را با A و پیشامد قبولی در درس شیمی را با B نمایش دهیم، طبق فرض داریم:

$$P(A) = 0.55, P(B) = 0.6, P(A \cup B) = 0.75$$

اکنون با استفاده از نکته بالا داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.75 = 0.55 + 0.6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.4$$

۹- پاسخ: گزینه ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * صفحه ۳۸ آمار و احتمال

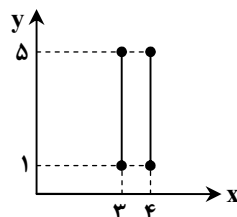
نکته: اگر A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه ضرب دکارتی آن‌ها که آن را با نماد $A \times B$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x = 3 \vee x = 4, 1 \leq y \leq 5\}$$

بنابراین نمودار $A \times B$ به شکل مقابل است:



واضح است که نمودار $A \times B$ به صورت دو پاره‌خط موازی محور y‌ها است.

پس گزینه ۲ پاسخ است.

۱۰- پاسخ: گزینه ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطة: دانش * صفحه‌های ۳۲ و ۳۸ آمار و احتمال

نکته ۱: $A \cup A' = U$

نکته ۲: $A - B = A \cap B'$

نکته ۳: $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

نکته ۴: $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$(A - B) \cup (B - A) \stackrel{\text{نکته ۲}}{=} (A \cap B') \cup (B \cap A') \stackrel{\text{نکته ۳}}{=} [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A']$$

$$\stackrel{\text{نکته ۳}}{=} [(A \cup B) \cap (B \cup B')] \cap [(A \cup A') \cap (B' \cup A')] \stackrel{\text{نکته ۴}}{=} (A \cup B) \cap (B' \cup A') = (A \cup B) \cap (B \cap A)'$$

$$\stackrel{\text{نکته ۲}}{=} (A \cup B) - (A \cap B)$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ است.

۱۱- پاسخ: گزینه ۳

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: درک و فهم * صفحه‌های ۳۴ و ۳۸ آمار و احتمال

$$\begin{cases} A \cap B' = A \cap C' \\ A \cup B' = A \cup C' \end{cases} \Rightarrow B' = C' \Rightarrow B = C$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ است.

۱۲- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه ۲۰ آمار و احتمال

فرض کنیم X یکی از زیرمجموعه‌های موردنظر باشد. با توجه به این که کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو X به ترتیب ۵ و ۱۷ است، این دو عدد حتماً عضو X هستند و اعداد کوچک‌تر از ۵ و بزرگ‌تر از ۱۷ قطعاً عضو X نیستند. اما هر کدام از اعداد طبیعی ۶، ۷، ... و ۱۶ می‌توانند عضو X باشند یا نباشند، یعنی هر کدام ۲ حالت دارند. با توجه به این که تعداد این اعداد برابر ۱۱ است، تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر 2^{11} است.

۱۳- پاسخ: گزینه ۲

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: درک و فهم * صفحه‌های ۲۰ و ۲۵ آمار و احتمال

نکته: در یک مجموعه n عضوی، تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی برابر $\binom{n}{k}$ و تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر 2^n است.

فرض کنیم مجموعه A دارای n عضو باشد. طبق فرض، داریم:

$$2^{n+2} = 2^n + 96 \Rightarrow 2^{n+2} - 2^n = 96 \Rightarrow 2^n(4-1) = 96 \Rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی A برابر است با: $\binom{5}{2} = 10$

۱۴- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: * ساده * حیطة: کاربرد * صفحه ۲۸ آمار و احتمال

نکته: $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $\emptyset' = U$, $U' = \emptyset$

با استفاده از نکته بالا داریم:

$$A \cup U = U \Rightarrow (A \cup U)' = U' = \emptyset \quad (*)$$

$$A \cap \emptyset' = A \cap U = A \Rightarrow (A \cap \emptyset')' = A' \quad (**)$$

از (*) و (**) داریم:

$$(A \cup U)' \cup (A \cap \emptyset')' = \emptyset \cup A' = A'$$

۱۵- پاسخ: گزینه ۱

▲ مشخصات سؤال: * متوسط * حیطة: کاربرد * صفحه ۲۹ آمار و احتمال

نکته: $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ نکته: $B - A = B \cap A'$ نکته: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ابتدا سمت چپ عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A') = (A \cup B) \cap U = A \cup B$$

طبق فرض، این مجموعه برابر B است، پس:

$$A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$$